

ESTUDO DE LOGARITMOS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Francisco Odécio Sales

Instituto Federal do Ceará

<http://lattes.cnpq.br/5358752623192820>

<https://orcid.org/0000-0002-2873-049X>

E-mail: odecio.sales@ifce.edu.br

Maria Aliciane Martins Pereira da Silva

Instituto Federal do Ceará - Campus Crateús

<https://lattes.cnpq.br/2449010017186245>

<https://orcid.org/0009-0006-9957-3993>

E-mail: maria.aliciane.martins61@aluno.ifce.edu.br

Tatiana Duarte de Brito

Instituto Federal do Ceará

<https://lattes.cnpq.br/0318409014031745>

<https://orcid.org/0000-0002-4471-0130>

E-mail: tatiprof7@gmail.com

DOI-Geral: <http://dx.doi.org/10.47538/BJE-2023.V1N4>

DOI-Individual: <http://dx.doi.org/10.47538/BJE-2023.V1N4-03>

RESUMO: Este artigo investiga o papel fundamental dos logaritmos, cujo surgimento no início do século XVII foi motivado pela necessidade de simplificar cálculos trigonométricos na Astronomia e Navegação. A contribuição pioneira do escocês John Napier, desenvolvedor dos logaritmos, é examinada, destacando-se a estratégia de substituir operações complexas, como multiplicação e divisão, por procedimentos mais simples, como adição e subtração. O texto aborda a prática comum na época de publicar tabelas contendo potências sucessivas de um número específico, evidenciando que a soma ou diferença dos expoentes refletia a multiplicação ou divisão das próprias potências. A utilidade dessas tabelas para simplificar cálculos era, no entanto, questionável, uma vez que a fatoração dos números a serem multiplicados nem sempre resultava em uma base comum. Além disso, o crescimento da base frequentemente resultava em lacunas significativas entre os números, dificultando a aplicação prática. Este estudo explora, portanto, não apenas a história dos logaritmos, mas também as limitações das abordagens tradicionais, propondo uma análise crítica das tabelas de potências. Ao compreender as dificuldades enfrentadas pelos matemáticos do passado, este artigo busca enriquecer a compreensão contemporânea dos logaritmos e sua evolução ao longo do tempo.

PALAVRAS-CHAVE: Estudo de Logaritmos. Resolução de problemas. Matemática.

STUDY OF LOGARITHMS THROUGH PROBLEM SOLVING

ABSTRACT: This article investigates the fundamental role of logarithms, whose emergence at the beginning of the 17th century was motivated by the need to simplify trigonometric calculations in Astronomy and Navigation. The pioneering contribution of Scottish John Napier, developer of logarithms, is examined, highlighting the strategy of replacing complex operations, such as multiplication and division, with simpler procedures, such as addition and subtraction. The text addresses the common practice at the time of publishing tables containing successive powers of a specific number, showing that the sum or difference of the exponents reflected the multiplication or division of the

powers themselves. The usefulness of these tables for simplifying calculations was, however, questionable, since factoring the numbers to be multiplied did not always result in a common base. Furthermore, the growth of the base often resulted in significant gaps between numbers, making practical application difficult. This study therefore explores not only the history of logarithms, but also the limitations of traditional approaches, proposing a critical analysis of power tables. By understanding the difficulties faced by mathematicians of the past, this article seeks to enrich the contemporary understanding of logarithms and their evolution over time.

KEYWORDS: Study of Logarithms. Problem solving. Mathematics.

UM POUCO DA HISTÓRIA DOS LOGARITMOS

O aparecimento dos logaritmos ocorreu no início do século XVIII, quando já era premente a necessidade de facilitar os cálculos trigonométricos da Astronomia e da Navegação. A ideia básica era substituir operações complicadas, como multiplicação e divisão, por operações mais simples, como adição e subtração.

Os logaritmos foram desenvolvidos pelo escocês John Napier ou Neper (1550 – 1617). Na época de Napier, era comum a publicação de tabelas com potências sucessivas de um determinado número, onde era claramente visível que o resultado da soma ou a diferença dos expoentes correspondiam à multiplicação ou divisão das próprias potências. Os matemáticos do passado tinham a constante preocupação de simplificar operações Aritméticas, principalmente aquelas que envolviam cálculos astronômicos. Mas o auxílio dessas tabelas em cálculo era um tanto quanto duvidoso, pois os números a serem multiplicados deveriam, ao ser fatorado possuir a mesma base e isso nem sempre acontecia, além de que as lacunas deixadas entre um número e outro tornavam-se grande demais quando a base crescia.

Vem:

$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$

Essas tabelas eram normalmente direcionadas a astrônomos cujo excesso de cálculo era responsável pela grande demora e por muitos erros. Dessa maneira, a invenção

dos logaritmos se constituiu na solução definitiva para esses problemas, mesmo antes de um estudo completo de exponenciais, as razões práticas justificaram seu aparecimento.

Percebendo que não há nada mais trabalhoso na prática da matemática, nem que mais prejudique e atrapalhe os calculadores, do que as multiplicações, as divisões, as extrações do quadrado e do cubo dos números muito grandes ... comecei a considerar em minha mente através de que tipo de arte certa e rápida poderia remover essas dificuldades. (JOHN NAPIER, *Mirifici logarithmorum canonicis descriptio*, 1614)

Napier que estava impressionado com as descobertas feitas por Kepler ficou sabendo da prostaférese¹, usado por Tycho Brahe em seus cálculos astronômicos. Foi o incentivo que faltava para que desenvolvesse seu método, e, em 1614, publicasse em Edimburgo o *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). O trabalho contém a descrição dos logaritmos, uma tabela e regras para uso. Suas tabelas de logaritmos de funções trigonométricas foram usadas durante quase um século. Ele dedicou pelo menos vinte anos a essa teoria, tendo finalmente explanado os princípios de seu trabalho em termos geométrico.

O sucesso que Napier obteve após a publicação de seu trabalho, chamou a atenção de Henry Briggs² que propôs a Napier o uso de potências de dez, ou seja, que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse 1. A proposta foi aceita por Napier e, dessa maneira, nascem os logaritmos Briggianos, ou logaritmos decimais, ou os nossos logaritmos comuns.

É notório a relevância dos logaritmos no desenvolvimento científico e tecnológico, a sua invenção foi algo extraordinário.

OS LOGARITMOS NUMA VISÃO MAIS ATUAL

Apresentamos o detalhamento de umas propriedades, teoremas e as demonstrações das mesmas. Os dados referentes a este capítulo são baseados em [6], [7] e [9].

¹ Método que é possível, na Trigonometria, converter a multiplicação de duas funções à soma de outras duas.

² Henry Briggs (1561 – 1631), professor de Geometria do Gresham College de Londres e professor de Astronomia em Oxford.

Propriedade 1. Uma função logarítmica $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.

Com efeito, se $x, y \in \mathbb{R}^+$ são diferentes, então ou $x < y$ ou $y < x$. No primeiro caso, resulta de a) que $L(x) < L(y)$. No segundo caso tem-se $L(y) < L(x)$. Em qualquer hipótese, de $x \neq y$ conclui-se que $L(x) \neq L(y)$.

Propriedade 2. Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.

Com efeito, sendo L crescente, de $0 < x < 1 < y$ resulta $L(x) < L(1) < L(y)$, isto é $L(x) < 0 < L(y)$

Teorema 1. Dadas as funções logarítmicas $L, M: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que exista um número $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Provaremos, neste caso, que $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$. Em primeiro lugar, de $L(a) = M(a)$ concluímos que $L(a^r) = M(a^r)$ para todo r racional. Com efeito, $L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r)$. Suponhamos, por absurdo, que existisse algum $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Para fixar ideias, digamos que fosse $L(b) < M(b)$. Escolhamos um número natural n tão grande que

$$n \cdot [M(b) - L(b)] > L(a).$$

Então $L(a^{1/n}) = L(a)/n < M(b) - L(b)$.

Por simplicidade, escrevamos $c = L(a^{1/n})$. Os números $c, 2c, 3c, \dots$ dividem \mathbb{R}^+ em intervalos justapostos, de mesmo comprimento c . Como $c < M(b) - L(b)$, pelo menos um desses números, digamos $m \cdot c$, pertence ao interior do intervalo $(L(b), M(b))$, ou seja, $L(b) < m \cdot c < M(b)$. Ora, $m \cdot c = L(a^{1/n}) = L(a^{m/n}) = M(a^{m/n})$.

Então $L(b) < L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}) < M(b)$.

Como L é crescente, a primeira das desigualdades acima implica $b < a^{m/n} < b$. Esta contradição mostra que b não existe: deve-se ter $M(x) = L(x)$ para todo $x > 0$.

O caso geral reduz-se ao caso particular acima.

Dadas L e M , funções logarítmicas arbitrárias, temos $L(2) > 0$ e $M(2) > 0$ porque $2 > 1$. Seja $c = M(2)/L(2)$. Consideremos a função logarítmica $N: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $N(x) = c \cdot L(x)$. Como $N(2) = c \cdot L(2) = [M(2)/L(2)] \cdot L(2) = M(2)$, segue - se do que se provou acima que $N(x) = M(x)$ para todo $x > 0$, ou seja, que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$, como queríamos demonstrar.

As propriedades dos logaritmos acima estabelecidas servem de fundamento para sua utilização como instrumento de cálculo. Vejamos um exemplo a fim de ilustrar o método.

Suponhamos que se deseje calcular $\sqrt[n]{a}$, onde a é um número real positivo e n um número natural. Para isso, supomos conhecida uma função logarítmica L . Pela Propriedade 6, temos $L(\sqrt[n]{a}) = \frac{L(a)}{n}$. Consultando uma tábua de valores de L , encontramos o valor $L(a)$, facilmente o dividimos por n e obtemos $L(\sqrt[n]{a}) = c$, um número conhecido. Novamente usando a tábua (desta vez no sentido inverso) encontramos um número positivo b tal que $L(b) = c$. Pela propriedade 1, de $L(b) = L(\sqrt[n]{a})$ concluímos que $b = \sqrt[n]{a}$. Problema resolvido.

Reexaminando a solução acima, surge uma questão. Quem nos garante que, dado o número real c , podemos sempre encontrar $b \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(b) = c$? Noutras palavras, a solução do problema só estará completa se pudermos assegurar que a função logarítmica $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva. Este ponto é esclarecido pelo teorema seguinte.

Teorema 2. Toda função logarítmica L é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real c , existe sempre um (único) número real positivo x tal que $L(x) = c$.

Demonstração do Teorema 2. Dado arbitrariamente um número real b , devemos obter um número real positivo α tal que $L(\alpha) = b$. Para achar α , usaremos uma versão moderna de um processo milenar para resolução numérica de equações, que os chineses antigos chamavam o “método do elemento celestial”. Esse método consiste em determinar, um a um, os inteiros $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, que compõem a representação decimal do número real α e em seguida, mostraremos que se tem de fato $L(\alpha) = b$.

Para determinar a parte inteira α_0 , lembramos que L é uma função crescente ilimitada, logo devem existir inteiros k tais que $L(k) > b$. Seja $a_0 + 1$ o menor inteiro tal que $L(a_0 + 1) > b$. então temos $L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1)$.

Em seguida, consideramos os números: $a_0, a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}, \dots, a_0 + \frac{9}{10}, a_0 + 1$.

Como $L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1)$, devem existir dois elementos consecutivos α_1 e $\alpha_1 + 1/10$ nessa sequência, tais que $L(\alpha_0) \leq b < L(\alpha_0 + 1/10)$, isto é, deve existir α_1 inteiro, $0 \leq \alpha_1 \leq 9$, tal que, pondo $\alpha_1 = a_0 + \frac{a_1}{10}$, tem-se: $L(\alpha_0) \leq b < L(\alpha_0 + 1/10)$,

Analogamente, consideramos os números:

$$\alpha_1, \alpha_1 + \frac{1}{10^2}, \alpha_1 + \frac{2}{10^2}, \dots, \alpha_1 + \frac{9}{10^2}, \alpha_1 + \frac{1}{10}$$

Vemos que existe $a_2, 0 \leq a_2 \leq 9$, tal que, pondo: $\alpha_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}$,

tem-se: $L(\alpha_2) \leq b < L(\alpha_2 + \frac{1}{10^2})$,

Prosseguindo analogamente, encontramos a representação decimal de um número real: $a_0 = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$, tal que, pondo $\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$, tem se: $L(\alpha_n) \leq b < L(\alpha_n + \frac{1}{10^n})$.

Afirmamos que $L(a) = b$. De fato, se fosse $L(a) < b$, usaríamos o lema para obter $x > 0$ tal que $L(a) < L(x) < b$. Como L é crescente, isto implicaria $a < x$. Então, tomando n tão grande que $x - a > 1/10^n$ teríamos $a + 1/10^n < x$, logo $\alpha_n + \frac{1}{10^n} \leq a + \frac{1}{10^n} < x$.

Como L é crescente, de $x > \alpha_n + 1/10^n$ resultaria $L(x) > L(\alpha_n + \frac{1}{10^n}) > b$,

Um absurdo, pois o número x foi obtido de modo que $L(x) < b$.

Analogamente, não se pode ter $L(a) > b$. Com efeito, usando novamente o Lema, obteríamos $x > 0$ tal que $b < L(x) < L(x)$

Como L é crescente, de $L(x) < L(\alpha)$ concluiríamos que $x < \alpha$. Isto implicaria, entretanto, que $x < \alpha_n$ para algum n . Então $L(x) < L(\alpha_n) \leq b$, contrariando o fato de que

x foi obtido de modo a satisfazer $b < L(x)$. Isto conclui a demonstração do Teorema 2. ■

TEOREMA DE CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Existe um teorema de extrema importância para conhecimento do professor de matemática, pois ele garante que a propriedade fundamental das funções logarítmicas é restrita, dentre todas as funções estritamente monótonas (que não alternam entre crescente e decrescente), ou seja, se uma função é monótona e possui a propriedade fundamental dos logaritmos então ela será obrigatoriamente uma função logarítmica. Em notação matemática dizemos:

Teorema 2: Seja $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona tal que $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração: Temos $f(1) = f(1) + f(1)$. Logo $f(1) = 0$. Admitamos f crescente e que exista $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(a) = 1$, dessa forma teremos $a > 1$, de acordo com o que foi visto anteriormente. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale:

$$f(a^m) = f(a \cdot a \dots a) = f(a) + f(a) + \dots + f(a)$$

$$f(a^m) = 1 + 1 + \dots + 1 = m$$

$$0 = f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m})$$

$$\text{Logo } f(a^{-m}) = -m.$$

Se $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $rn = m$, portanto:

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r) \Rightarrow f(a^r) = \frac{m}{n}$$

Se $x \in \mathbb{R}$ irracional então, para r, s racionais tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s$$

Portanto todo número racional r , menor do que x é também maior do que $f(a^x)$. Segue-se que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $f(y) = \log_a y$ para todo $x > 0$. Caso f seja decrescente a demonstração seguirá o mesmo padrão.

Na demonstração acima, foi aceito a existência de $a \in \mathbb{R}^+$. Agora poderemos demonstrar que este a pode ser obtido para todos os casos em que o teorema se aplica. Para isso, consideremos o caso geral com a função crescente $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$g(xy) = g(x) + g(y)$$

Teremos que $g(1) = 0$, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. Podemos agora criar uma função crescente $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, e que transforma somas em produtos cumprindo a condição $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = \log_a x$ para todo $x > 0$. usando a definição de logaritmo teremos que: $x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = (2^{\frac{1}{b}})^{g(x)} = a^{g(x)}$, com $a = 2^{\frac{1}{b}}$

Assim teremos que $g(x) = \log_a x$, mostrando assim que sempre podemos encontrar a base utilizada no início da demonstração. ■

APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS

Mostraremos neste capítulo algumas aplicações logarítmicas com exemplificações que podem ser encontradas em ???

1) O brilho de uma estrela percebido pelo olho humano, na Terra, é chamado de magnitude aparente da estrela. Já a magnitude absoluta da estrela é a magnitude aparente que a estrela teria se fosse observada a uma distância padrão de 10 parsecs (1 parsec é aproximadamente $3 \times 10^{13} \text{ km}$). As magnitudes aparente e absoluta de uma estrela são muito úteis para se determinar sua distância ao planeta Terra. Sendo m a magnitude aparente e M a magnitude absoluta de uma estrela, a relação entre m e M é dada aproximadamente pela fórmula

$$M = m + 5 \cdot \log_3(3 \cdot d^{-0,48})$$

onde d é a distância da estrela em parsecs. A estrela Rigel tem aproximadamente magnitude aparente 0,2 e magnitude absoluta $-6,8$. Determine a distância, em quilômetros, de Rigel ao planeta Terra.

$$\begin{aligned} M &= m + 5 \cdot \log_3(3 \cdot d^{-0,48}) \\ -6,8 &= 0,2 + 5 \cdot \log_3(3 \cdot d^{-0,48}) \end{aligned}$$

$$-7 = 5 \cdot \log_3 (3 \cdot d^{-0,48})$$

$$\log_3 (3 \cdot d^{-0,48}) = -\frac{7}{5}$$

$$\log_3 3 - 0,48 \log_3 d = -\frac{7}{5}$$

$$1 - 0,48 \log_3 d = -1,4$$

$$-0,48 \log_3 d = -2,4$$

$$0,48 \log_3 d = 2,4$$

$$\log_3 d = 5$$

$$d = 3^5 \text{ parsecs}$$

∴

$$3^5 \cdot 3 \cdot 10^{13} = 3^6 \cdot 10^{13} \text{ km.} \quad \blacksquare$$

2) A tireoide é uma das glândulas mais importantes do corpo humano. Encontrada próximo à laringe, é responsável por regular a “velocidade” do funcionamento do organismo. Essa glândula produz os chamados hormônios tiroidianos, como a triiodotironina (T3) e a tiroxina (T4). Os altos e baixos desses hormônios são as principais causas das doenças de tireoide: hipertireoidismo e hipotireoidismo, respectivamente. Para exames de tireoide, é utilizado o elemento químico radioativo Iodo – 131, que tem meia-vida de 8 dias, ou seja, em oito dias metade do número de átomos radioativos se desintegra. A fórmula que calcula a quantidade de material radioativo em função do tempo de meia-vida é dada por

$$Q = Q_0 \cdot 2^{-t},$$

onde Q é a quantidade restante, Q_0 é a quantidade inicial do elemento radioativo e t é o número de períodos de meia-vida.

Suponha que uma clínica especializada em exames de tireoide tenha em seu estoque 100 g de Iodo – 131, quantos dias aproximadamente serão necessários para que o Iodo – 131 fique reduzido a 0,00001 g? (Use $\log_2 10 \approx 3,3$).

$$Q = Q_0 \cdot 2^{-t}$$

$$0,00001 = 100 \cdot 2^{-t}$$

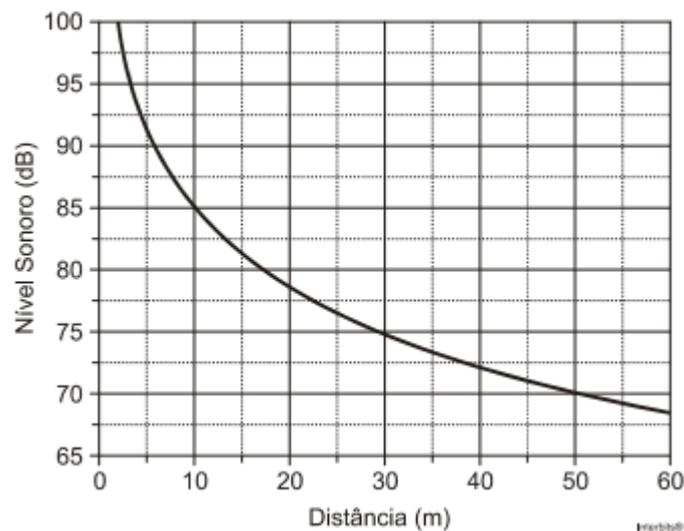
$$10^{-5} = 10^2 \cdot 2^{-t}$$

$$10^{-7} = 2^{-t}$$

$$\begin{aligned}\log_2 10^{-7} &= \log_2 2^{-t} \\ -7\log_2 10 &= -t \cdot \log_2 2 \\ -7 \cdot 3,3 &= -t \\ \therefore \\ t &= 23,1\end{aligned}$$

3) O nível sonoro S é medido em decibéis (dB) de acordo com a expressão $S = (10\text{dB})\log \frac{I}{I_0}$,

onde I é a intensidade da onda sonora e $I_0 = 10^{-12}\text{W}/\text{m}^2$ é a intensidade de referência padrão correspondente ao limiar da audição do ouvido humano. Numa certa construção, o uso de proteção auditiva é indicado para trabalhadores expostos durante um dia de trabalho a um nível igual ou superior a 85dB . O gráfico abaixo mostra o nível sonoro em função da distância a uma britadeira em funcionamento na obra



De acordo com o gráfico e as informações dadas, responda:

A que distância mínima da britadeira os trabalhadores podem permanecer sem proteção auditiva? E qual é a intensidade da onda sonora emitida pela britadeira a uma distância de 50m?

De acordo com o gráfico, para um nível sonoro de 85dB , a distância correspondente é de 10m . Portanto, essa é a distância mínima a que os trabalhadores devem permanecer sem necessitar de proteção auditiva.

De acordo com o gráfico, para uma distância de 50m , o nível sonoro correspondente é $S = 70\text{dB}$.

Temos $I_0 = 10^{-12}\text{W}/\text{m}^2$, assim

$$70 = 10\log \frac{I}{10^{-12}}$$

$$7 = \log \frac{I}{10^{-12}}$$

$$\log \frac{I}{10^{-12}} = 7$$

$$\therefore I = 10^{-5} \text{W}/\text{m}^2$$

■

4) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escola de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o *dina · cm*. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7,3$.

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento M_0 sísmico do terremoto de Kobe (em *dina · cm*)?

Pelo enunciado, temos a seguinte fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

Como $M_w = 7,3$, temos:

$$7,3 = -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10}(M_0)$$

$$18 = \frac{2}{3} \log_{10}(M_0)$$

$$\frac{2}{3} \log_{10}(M_0) = 18$$

$$\log_{10}(M_0) = 27$$

$$M_0 = 10^{27}. \quad \blacksquare$$

LOGARITMO NATURAL

Esta seção e a próxima é baseada em [6].

A criação dos logaritmos denominados *naturais* está ligada ao processo de obtenção da área de uma faixa positiva da hipérbole $xy = 1$ ou $y = \frac{1}{x}$. É, portanto, necessário entender o que relaciona a área de uma faixa da hipérbole citada com a ideia já mencionada de logaritmo.

Primeiramente, define-se a faixa positiva da hipérbole $y = \frac{1}{x}$, com o símbolo H_a^b , como sendo o conjunto dos pontos (x, y) do plano \mathbb{R}^2 tal que $a \leq x \leq b$, com $a, b \in \mathbb{R}^+$, sendo $0 < a < b$ e $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$. Dessa forma é possível observar que H_a^b é uma região do plano limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ nas laterais, pela reta $y = 0$ ao sul e pela hipérbole ao norte.

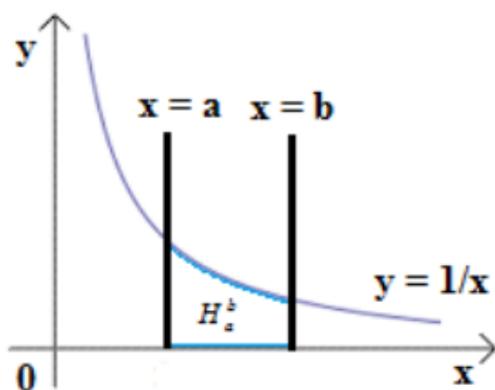


Figura 5 – Região H_a^b

Uma característica extremamente importante destas áreas pode ser expressa pelo seguinte:

Teorema: Dado $k \in \mathbb{R}^+$, H_a^b e H_{ka}^{kb} têm a mesma área.

Demonstração: Dado um retângulo qualquer inscrito na faixa da hipérbole $y = \frac{1}{x}$, com base no seguimento $[c, d]$ do eixo das abcissas, devemos mostrar que outro retângulo também escrito na faixa da hipérbole e com base no seguimento $[kc, kd]$ novamente contido no eixo das abcissas terá mesma área. Temos dessa forma, que a área do primeiro retângulo será igual a $(d - c) \cdot \frac{1}{d} = 1 - \frac{c}{d}$, enquanto a área do segundo será $(kd - kc) \cdot \frac{1}{kd} = \frac{k(d-c)}{kd} = 1 - \frac{c}{d}$, o que demonstra que são iguais.

Consideremos agora um polígono retangular P , inscrito em H_a^b . Se multiplicarmos por k cada uma das abcissas dos pontos de subdivisão de $[a, b]$, determinados por P , obteremos subdivisões do intervalo $[ka, kb]$ e, portanto, um polígono retangular P' inscrito em H_{ka}^{kb} . Pelo que já vimos, pode-se afirmar que os retângulos pertencentes a P têm mesma área que seus correspondentes em P' , ou seja, P e P' têm a mesma área.

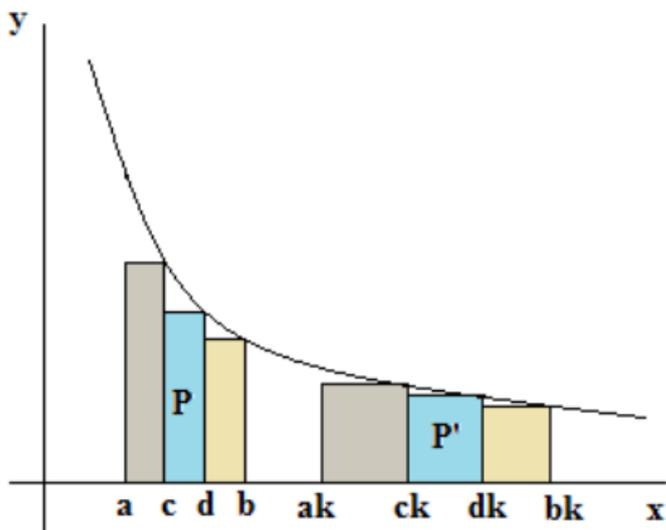


Figura 6 – Polígonos retangulares sob o gráfico da hipérbole $y = \frac{1}{x}$

Concluimos assim que para cada polígono retangular inscrito em H_a^b existirá um inscrito em H_{ka}^{kb} , com mesma área. O caminho inverso é obtido de maneira similar, bastando dividir cada abscissa do polígono inscrito em H_{ka}^{kb} por k e assim obter outro de mesma área em H_a^b .

A afirmação demonstrada acima significa que as áreas destas duas faixas de hipérbole são valores que possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores, e, por esse motivo, são iguais.

Notemos agora que:

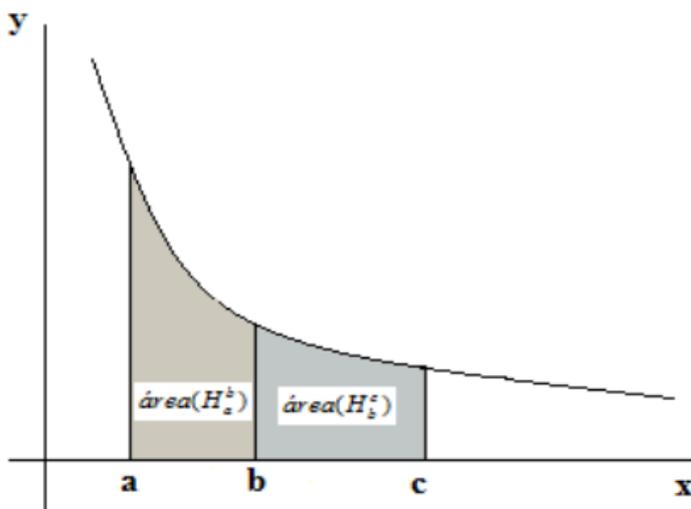


Figura 7 – Áreas conjugadas sob o gráfico da hipérbole $y = \frac{1}{x}$

$$\text{área}(H_a^b) + \text{área}(H_b^c) = \text{área}(H_a^c).$$

Se restringirmos a equação acima para que $a = 1, b = x$ e $c = xy$, com $x, y \in \mathbb{R}^+$ teremos a expressão: $\text{área}(H_1^{xy}) = \text{área}(H_1^x) + \text{área}(H_x^{xy})$.

Como já foi demonstrado no teorema acima, $\text{área}(H_x^{xy}) = \text{área}(H_1^y)$. Assim,

$$\text{área}(H_1^{xy}) = \text{área}(H_1^x) + \text{área}(H_1^y).$$

Agora podemos definir o que são os logaritmos naturais.

Definição: a função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \text{área}(H_1^x)$ é chamada de logaritmo natural de x , sendo $f(x) = \ln x$.

Veja que se $0 < x < 1$ então $\ln x < 0$.

A função logaritmo natural terá todas as propriedades de uma função logarítmica, visto que, é monótona crescente ($\forall x > x^1$, com $x, x^1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \text{área}(H_1^x) > \text{área}(H_1^{x^1})$) e satisfaz a propriedade geral dos logaritmos descrita no capítulo anterior como restrita a funções deste tipo.

REFERÊNCIAS

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes. Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake MagnitudePolicy. Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Submissão: setembro de 2022. Aceite: outubro de 2022. Publicação: julho de 2023.